GLOBAL GEOMETRÍA Mayo 2010

1. Dados los puntos A(2,1,-1) y B(-2,3,1) y la recta r definida por las ecuaciones $\begin{cases} x-y-z=-1 \\ 3x-2z=-5 \end{cases}$

Halla las coordenadas de un punto de la recta r que equidiste de los puntos A y B. (2,5 puntos)

2. Considera el plano $\pi \equiv 2x+2y-z-6=0$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{2}$

a) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano π con los ejes de coordenadas. (2 puntos)

b) Calcula, razonadamente, la distancia de la recta r al plano π. (1,5 ptos)

3. Sean π y π' los planos determinados por los puntos siguientes:

El plano π pasa por los puntos (0,2,1), (3,-1,1) y (1,-1,5) y el plano π' pasa por los puntos (3,0,2), (2,1,1) y (5,4,-2).

Se pide calcular:

a) Ecuaciones paramétricas de la recta r intersección de ambos planos. (1,5 puntos)

b) El ángulo que forman los planos π y π'. (1 punto)

c) La ecuación del plano que contiene a la recta r y forma un ángulo de 90° con el plano π. (1,5 puntos)

SOLUCIONES

1. Dados los puntos A(2,1,-1) y B(-2,3,1) y la recta r definida por las ecuaciones $\begin{cases} x-y-z=-1 \\ 3x-2z=-5 \end{cases}$ Halla las coordenadas de un punto de la recta r que equidiste de los puntos A y B.

Ponemos r en paramétricas:

$$\begin{cases} x-y=-1+\lambda \\ 3x=-5+2\lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-5+2\lambda}{3} \rightarrow y=\dfrac{-5+2\lambda}{3}+1-\lambda \end{cases}$$

$$r\equiv\begin{cases} x=-\dfrac{5}{3}+\dfrac{2}{3}\lambda \\ y=-\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{3}\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$$ Punto genérico de r $\rightarrow P\left(\dfrac{-5+2\lambda}{3},-\dfrac{2+\lambda}{3},\lambda\right)$; $d(A,P)=d(B,P)$

$$\sqrt{\left(\frac{-5+2\lambda}{3}-2\right)^2+\left(\frac{-2-\lambda}{3}-1\right)^2+(\lambda+1)^2}=\sqrt{\left(\frac{-5+2\lambda}{3}+2\right)^2+\left(\frac{-2-\lambda}{3}-3\right)^2+(\lambda-1)^2}$$

$$\left(\frac{-11+2\lambda}{3}\right)^2+\left(\frac{-5-\lambda}{3}\right)^2+(\lambda+1)^2=\left(\frac{1+2\lambda}{3}\right)^2+\left(\frac{-11-\lambda}{3}\right)^2+(\lambda-1)^2$$

$$\left(\frac{121-44\lambda+4\lambda^2}{9}\right)+\left(\frac{25+10\lambda+\lambda^2}{9}\right)+(\lambda^2+2\lambda+1)=\left(\frac{1+4\lambda+4\lambda^2}{9}\right)+\left(\frac{121+22\lambda+\lambda^2}{9}\right)+(\lambda^2-2\lambda+1)$$

$$121-44\lambda+4\lambda^2+25+10\lambda+\lambda^2+18\lambda=1+4\lambda+4\lambda^2+121+22\lambda+\lambda^2-18\lambda$$

$$-44\lambda+25+10\lambda+18\lambda=1+4\lambda+22\lambda-18\lambda\Rightarrow(-44+10+36-22-4)\lambda=-24\Rightarrow\lambda=1$$

$$P\left(-\frac{5}{3}+\frac{2}{3},-\frac{2}{3}-\frac{1}{3},1\right)\rightarrow P(-1,-1,1)$$

2. Considera el plano $\pi\equiv 2x+2y-z-6=0$ y la recta $r\equiv\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z}{2}$

a) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano π con los ejes de coordenadas.

$$\pi\equiv 2x+2y-z-6=0\rightarrow OX\equiv\begin{cases} x=\lambda \\ y=0\Rightarrow 2\lambda-6=0\Rightarrow\lambda=3\rightarrow A(3,0,0) \\ z=0 \end{cases}$$

$$\pi\equiv 2x+2y-z-6=0\rightarrow OY\equiv\begin{cases} x=0 \\ y=\lambda\Rightarrow 2\lambda-6=0\Rightarrow\lambda=3\rightarrow B(0,3,0) \\ z=0 \end{cases}$$

$$\pi \equiv 2x+2y-z-6=0 \to OZ \equiv \begin{cases} x=0 \\ y=0 \Rightarrow -\lambda-6=0 \Rightarrow \lambda=-6 \to C(0,0,-6) \\ z=\lambda \end{cases}$$

$$\overrightarrow{AB}=(-3,3,0), \overrightarrow{AC}=(-3,0,-6)$$

$$A=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| \Rightarrow A=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -6 & -3 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}^2}=\frac{1}{2}\sqrt{729}=\frac{27}{2}u^2$$

b) Calcula, razonadamente, la distancia de la recta r al plano π.

$r \equiv \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{2}$; $\pi \equiv 2x+2y-z-6=0$, estudiamos la posición relativa:

$$r \equiv \begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=-1-\lambda \to 2(1+2\lambda)+2(-1-\lambda)-2\lambda-6=0 \to 2+4\lambda-2-2\lambda-2\lambda-6=0 \\ z=2\lambda \end{cases}$$

$0\lambda=6$ El plano y la recta son paralelos, luego, para hallar la distancia entre ellos, tomaremos un punto de la recta r y calcularemos la distancia desde ese punto al plano: P(1, -1, 0)

$$d(r,\pi)=d(P,\pi)=\frac{|2\cdot 1+2\cdot(-1)-0-6|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{6}{\sqrt{9}}=2\,u$$

3. Sean π y π' los planos determinados por los puntos siguientes:
El plano π pasa por los puntos (0,2,1), (3,-1,1) y (1,-1,5) y el plano π' pasa por los puntos (3,0,2), (2,1,1) y (5,4,-2).
Se pide calcular:
a) Ecuaciones paramétricas de la recta r intersección de ambos planos.

Plano π: $P(0,2,1)$ $\vec{d}=\overrightarrow{AP}=(-3,3,0)$; $\vec{e}=\overrightarrow{BP}=(-1,3,-4)$

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-2 & z-1 \\ -3 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -4 \end{vmatrix}=0 \to -12x-9z+9+3z-3-12y+24=0 \to 2x+2y+z-5=0$$

Plano π': $Q(3,0,2)$ $\vec{d}=\overrightarrow{CQ}=(1,-1,1)$; $\vec{e}=\overrightarrow{DQ}=(-2,-4,4)\to(-1,-2,2)$

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-0 & z-2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix}=0 \to -3y-3z+6=0 \to y+z-2=0$$

Recta pedida: $r \equiv \begin{cases} 2x+2y+z-5=0 \\ y+z-2=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=2-\lambda \\ 2x+4-2\lambda+\lambda=5 \end{cases} \rightarrow r \begin{cases} x=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$

b) El ángulo que forman los planos π y π'.

$\pi \equiv 2x+2y+z-5=0 \rightarrow \vec{n}(2,2,1)$; $\quad \pi': y+z-2=0 \rightarrow \vec{n}'(0,1,1)$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{n}\cdot\vec{n}'}{|\vec{n}|\cdot|\vec{n}'|} = \frac{2+1}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{2}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45^{\circ}$$

c) La ecuación del plano que contiene a la recta r y forma un ángulo de 90° con el plano $\pi \equiv 2x+2y+z-5=0 \rightarrow \vec{n}(2,2,1)$

$$r \begin{cases} x=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \rightarrow \text{Punto}\left(\frac{1}{2},2,0\right), \quad \vec{d}\left(-\frac{1}{2},-1,1\right), \vec{e}=\vec{n}(2,2,1)$$

$$\begin{vmatrix} x-\frac{1}{2} & y-2 & z-0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -x+\frac{1}{2}+2y-4+z+2z-2x+1-\frac{1}{2}y+1=0$$

$$-3x+\frac{3}{2}y+3z-2=0 \rightarrow 6x-3y-6z+4=0$$